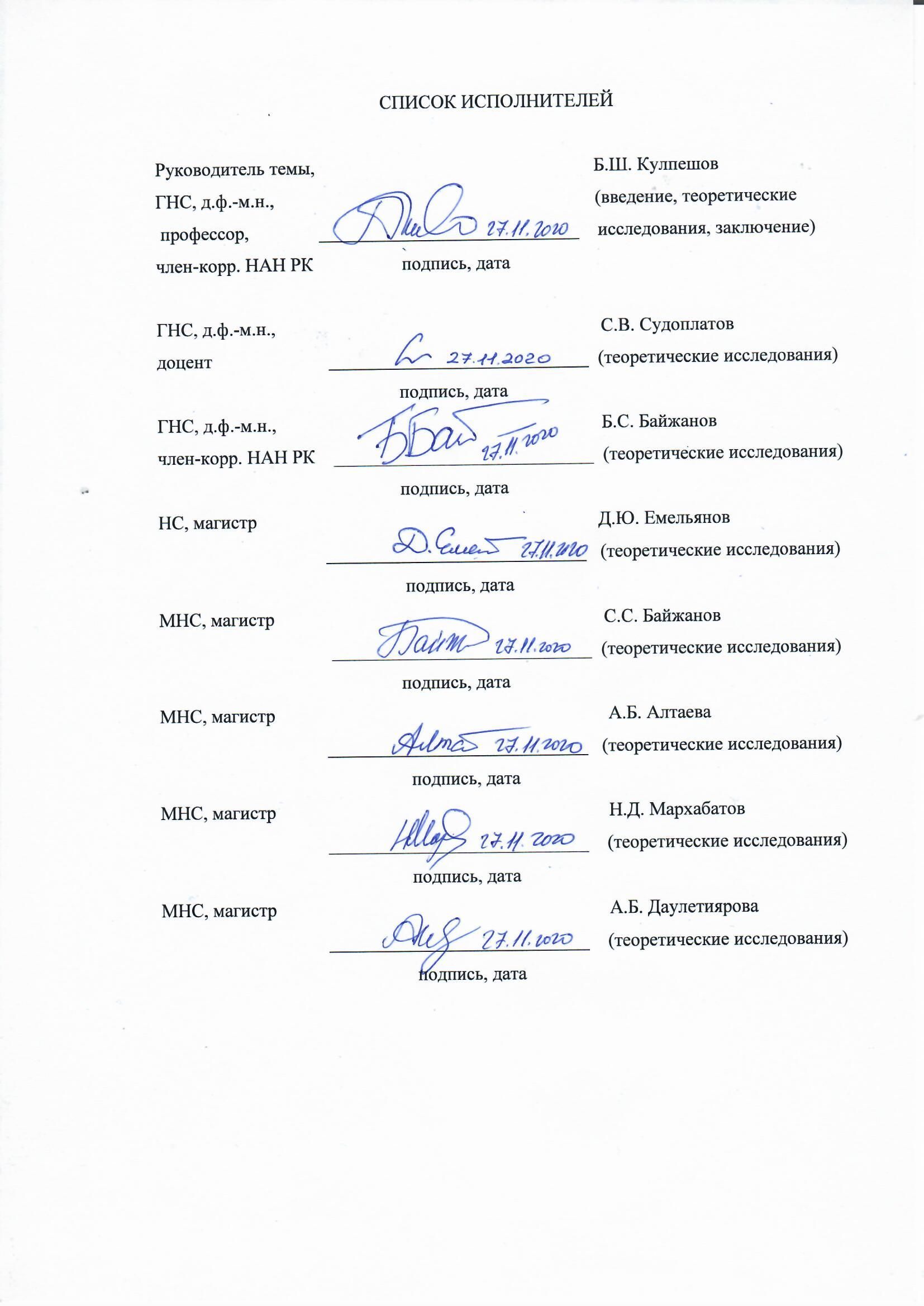
****

****

**РЕФЕРАТ**

Отчет 21 с., 29 источн., 2 прил.

СЛАБАЯ О-МИНИМАЛЬНОСТЬ, Р-КОМБИНАЦИЯ, Е-КОМБИНАЦИЯ, ПОЧТИ ОМЕГА-КАТЕГОРИЧНОСТЬ, ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ, БИНАРНАЯ ИЗОЛИРУЮЩАЯ ФОРМУЛА, АЛГЕБРА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БИНАРНЫХ ФОРМУЛ, РАНГ ВЫПУКЛОСТИ, ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ

Объектом исследования являются слабо о-минимальные теории, почти ω-категоричные упорядоченные теории, алгебры распределения изолирующих бинарных формул, Р-комбинации и Е-комбинации.

Цель проекта – исследование теоретико-модельных свойств упорядоченных структур, а также их элементарных теорий, их описание и классификация.

Методами исследований являются классические методы теории моделей, в частности, методы исследования упорядоченных структур, такие как описание моделей посредством анализа поведения определимых унарных функций, исследование моделей посредством классификации по введенному рангу выпуклости и другие.

Все полученные результаты являются новыми, носят фундаментальный, теоретический характер и заключаются в следующем:

1 Исследованы свойства почти ω-категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1.

2 Доказана ортогональность произвольного семейства попарно слабо ортогональных 1-типов для почти ω-категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1.

3 Доказано что почти ω-категоричные слабо о-минимальные теории ранга выпуклости 1 являются бинарными.

**РЕФЕРАТ**

Отчет 21 б., 29 дер., 2 тірк.

ӘЛСІЗ О-МИНИМАЛДЫЛЫҚ, Р-КОМБИНАЦИЯ, Е-КОМБИНАЦИЯ, ДЕРЛІК ОМЕГА-КАТЕГОРИЯЛЫҚ, ОРТОГОНАЛДЫҚ, БИНАРЛЫҚ ОҚШАЛАУ ФОРМУЛА, БИНАРЛЫҚ ФОРМУЛАЛАРДЫ ТАРАТУ АЛГЕБРАСЫ, ДӨҢЕСТIК РАНГIСI, МОДЕЛЬДЕР ТЕОРИЯСЫ

Әлсіз о-минималды теориялар, дерлік ω-категориялық реттелген теориялар, оқшалау бинарлық формулалар алгебралары, Р-комбинациялар мен Е-комбинациялар зерттеу объектiсi болып табылады.

Жобаның максаты – реттелген кұрылымдардың теориялы-модельдiк қасиеттерiн зерттеп, сонымен қатар олардың элементарлық теориясын бейнелеп классификациялау.

Модельдер теориясының классикалық әдiстері, соның iшiнде реттелген құрылымдарды зерттеу, сол сияқты, анықталған унарлы функциялардың жүріс-тұрысын талдаумен модельдерді сипаттау, берілген дөңестік рангімен классификациясы арқылы модельдерді зерттеу және тағы да басқа зерттеу әдiстері толып табылады.

Алынған барлық нәтижелер жаңа, іргелі және теоретикалық болып табылады және төмендегідей қорытынды жасауға болады:

1 Дерлік ω-категориялық әлсіз о-минималды теориялардың қасиеттері зерттелінді.

2 Дөңестік рангісі 1 дерлік ω-категориялық әлсіз о-минималды теориялары үшін әлсіз ортогоналды 1-типтер кез келген жиындардың ортогоналдығы дәлелденді.

3 Дөңестік рангісі 1 дерлік ω-категориялық әлсіз о-минималды теориялардың бинарлығы дәделденді.

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| ВВЕДЕНИЕ ……………………………………………………………………………… | 6 |
| 1 Выбор направления исследований ..…………………………………………………. | 8 |
| 2 Теоретические исследования …………………………………………………….…… | 10 |
| 3 Обобщение и оценка результатов ……………………………………………………. | 17 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ …………………………………………………………………………. | 19 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ …………………………………… | 20 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А. Список публикаций исполнителей за 2020 год …………. | 22 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Календарный план …………………………………………………. | 23 |

**ВВЕДЕНИЕ**

Упорядоченные алгебраические структуры являются одним из классических объектов в математике. Достаточно только вспомнить упорядоченное поле вещественных чисел или арифметику. Однако в теории моделей общая теория упорядоченных структур начала развиваться только после того, как в 1984 году А. Пиллай и Ч. Стейнхорн ввели понятие о-минимальности в серии совместных работ [1]-[3], которое оказалось весьма плодотворным (Заметим, что введение понятия о-минимальности непосредственно инспирировано статьей Л. ван ден Дриеса [4], где он изучал о-минимальные обогащения 〈R, <〉). Напомним, что линейно упорядоченная структура называется о-минимальной, если любое ее формульное подмножество является конечным объединением интервалов и точек. Классический пример о-минимальной структуры — упорядоченное поле вещественных чисел. На сегодняшний день о-минимальность является очень развитой областью в теории моделей с многочисленными применениями не только в математической логике, но и в аналитической и дифференциальной геометрии, теории функций. Здесь нельзя не отметить выдающийся результат А. Вилки [5], который напрямую связан с теорией функций и геометрией и утверждает, что дополнение конечного числа проекций полиномиально-экспоненциальных равенств и неравенств само является проекцией полиномиально-экспоненциальных равенств и неравенств, иначе говоря, что обогащение упорядоченного поля вещественных чисел экспонентой имеет модельно полную и о-минимальную теорию.

Наряду с понятием о-минимальности появились его модификации. Д. Макферсон, Д. Маркер и Ч. Стейнхорн исследовали понятие слабой о-минимальности и доказали, что слабо о-минимальное упорядоченное поле является вещественно замкнутым [6], а затем рассмотрели и другие варианты о-минимальности [7]. О. Белеградек и другие [8] ввели понятие квази-о-минимальности. В этих модификациях сохранялось то, что рассматриваемые структуры являлись линейно упорядоченными. По другому пути пошли Л. Невельски и Р. Венсель [9]: они рассмотрели о-минимальные булево упорядоченные структуры: оставив неизменным понятие о-минимальности, но отказавшись от линейности. Затем А. Гласс, А. Макинтайер, и Ф. Пуан рассмотрели решеточно упорядоченные группы в работе [10]. Д. Макферсон и Б.Ш. Кулпешов исследовали понятие слабой циклической минимальности на циклически упорядоченных множествах [11]. Понятие о-стабильности (или упорядоченной стабильности), введенное в [12], является обобщением о-минимальности несколько в другом русле, а именно в том, что любое сечение имеет малое число расширений до полных 1-типов. Вспомним, что любое сечение в о-минимальной структуре расширяется единственным образом до полного 1-типа [1], а в слабо о-минимальной структуре имеет самое большее два расширения [13]. Р. Клюкер и Е. Линкненг рассматривали версию р-адической минимальности для р-адических полей [14]. К.Ж. Кудайбергенов рассмотрел понятие о-минимальности на частично упорядоченных структурах [15]. И это далеко не полный список работ в этом направлении, что говорит о том, что в теории моделей идет активный поиск методов исследования различных вариантов о-минимальности. Отметим, что несмотря на целый ряд полученных результатов по о-минимальным и слабо о-минимальным структурам, продолжается их активное исследование. Недавно в работе [16] С. Мокония и П. Танович ввели понятие стационарно упорядоченной теории, расширяющее понятие слабой о-минимальной теории, и подтвердили Гипотезу Воота для бинарных стационарно упорядоченных теорий.

Понятие почти -категоричности появилось в работе К. Икеды, А. Пиллая и А. Цубоя [17]. Оно тесно связано с понятием эренфойхтовости теории. Так в работе [17] показано что если произвольная почти -категоричная теория имеет ровно три счетные попарно неизоморфные модели, то в этой теории интерпретируется плотный линейный порядок. В работе [18] авторами установлена почти -категоричность эренфойхтовых вполне о-минимальных теорий.

Алгебры бинарных формул являются производными объектами для данных теорий и позволяют на бинарном уровне определять взаимосвязь формул, классифицировать теоретико-модельные объекты в алгебраических терминах и наоборот. Алгебры бинарных формул были аксиоматизированы в общем случае С.В. Судоплатовым и И.В. Шулеповым, а затем описаны Б.Ш. Кулпешовым, С.В. Судоплатовым, Д.Ю. Емельяновым для ряда значимых упорядоченных теорий.

Р-комбинации и Е-комбинации моделей и теорий задают естественные операторы для семантических и синтаксических объектов, позволяющие порождать новые объекты, вычислять их спектр, определять классификационные возможности. Эти комбинации были определены и описаны в общем виде С.В. Судоплатовым.

**1 Выбор направления исследований**

Настоящий проект направлен на решение проблемы классификации упорядоченных алгебраических систем и их элементарных теорий. В рамках проекта предполагается: получение классификации упорядоченных алгебраических систем с условием почти -категоричности; классификация алгебр распределений бинарных формул данной теории; классификация Р-комбинаций и Е-комбинаций произвольного числа почти -категоричных упорядоченных теорий. Темы исследований данного проекта являются в настоящий момент актуальными для развития теории алгебраических систем и интенсивно изучаются в ведущих мировых математических центрах.

Цель проекта будет достигаться посредством выполнения следующих задач: исследования свойств почти -категоричных упорядоченных теорий, описания алгебр бинарных изолирующих формул для почти -категоричных упорядоченных теорий, исследования свойств Р-комбинаций и Е-комбинаций почти -категоричных упорядоченных теорий. Для достижения цели проекта будут исследованы вопрос ортогональности семейств попарно слабо ортогональных неалгебраических 1-типов в почти -категоричных упорядоченных теориях или найти условия, при которых такие семейства будут ортогональными; вопрос бинарности почти -категоричных упорядоченных теорий или найти условия, при которых исследуемые теории будут бинарными; описаны алгебры бинарных изолирующихся формул как для произвольного неалгебраического 1-типа, так и для произвольной пары таких типов в почти -категоричных упорядоченных теориях; исследованы вопрос обобщенной коммутативности алгебр бинарных изолирующих формул для произвольной пары неалгебраических 1-типов; свойства Р-комбинаций произвольного числа почти -категоричных упорядоченных теорий, в частности, исследовать вопрос сохранения почти -категоричности таких комбинаций; свойства Е-комбинаций произвольного числа почти -категоричных упорядоченных теорий, в частности, исследовать вопрос сохранения почти -категоричности таких комбинаций.

Предполагаемые исследования носят фундаментальный характер, их научная значимость обусловлена применением глубоких, современных результатов математической логики (теории моделей). Результаты исследований могут применяться для дальнейших изысканий не только в теории моделей и алгебре, но и в таких разделах компьютерных наук, как общая теория реляционных баз данных и формальные методы проектирования программного обеспечения.

В настоящем проекте используются методы, которые получили свое развитие в теории моделей в 80-е годы XX века и позже. Среди них можно отметить методологию изучения упорядоченных структур на основе таких понятий, как о-минимальность и варианты о-минимальности. Типичным в такой ситуации является наложение строгих ограничений на множества, определяемые формулой с одной свободной переменной. Так, о-минимальная структура M может рассматриваться как L-структура, где L ⊃ L0 = {<}, < – линейный порядок на M, и каждое определимое подмножество структуры M является бескванторно L0-определимым. Это дает установку для других понятий: заменяем L0 на некоторый другой известный язык, рассматриваем L-структуры такие, что L0-редукт имеет обусловленный тип (например, линейный порядок), и требуем, чтобы каждое определимое подмножество структуры M являлось (бескванторно) L0-определимым (можно требовать это для всех моделей данной теории). Кроме того, можно отметить методы исследования упорядоченных и генерических структур, развитые исполнителями проекта за последние 20 лет, такие как описание моделей посредством анализа поведения определимых унарных функций, исследование моделей посредством классификации по введенному рангу выпуклости, построение структур по заданному списку элементарных и неэлементарных свойств, исследование и классификация структур, а также их теорий на основе производных структур, включая алгебры распределений формул.

Данный проект является продолжением ранее проведенных членами исследовательской группы научных исследований. Ранее были исследованы почти -категоричные вполне о-минимальные теории, доказана их бинарность, а в настоящем проекте планируется исследовать свойства теорий, собственно расширяющих их, а именно, почти -категоричные слабо о-минимальные теории. Также ранее были описаны алгебры бинарных изолирующих формул как для счетно-категоричных слабо о-минимальных теорий, так и для вполне о-минимальных теорий с малым числом счетных моделей; здесь же предлагается описать алгебры формул для упорядоченных теорий с условием почти -категоричности. Ранее были исследованы свойства Р-комбинаций и Е-комбинаций счетного числа копий счетно-категоричной структуры чистого линейного порядка; здесь также предлагается расширить эти исследования на более широкий класс, а именно, исследовать Р-комбинации и Е-комбинации упорядоченных структур с условием почти -категоричности.

**2 Теоретические исследования**

Пусть — счетный язык первого порядка. Всюду в данном разделе мы рассматриваем -структуры и предполагаем что содержит символ бинарного отношения , который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящая работа касается понятия слабой о-минимальности, первоначально глубоко исследованного в [6]. Подмножество линейно упорядоченной структуры называется выпуклым, если для любых и всякий раз когда мы имеем .

Слабо о-минимальной структурой называется линейно упорядоченная структура такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры является объединением конечного числа выпуклых множеств в . Вспомним что такая структура называется о-минимальной, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры является объединением конечного числа интервалов и точек в Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Пусть — линейно упорядоченная структура. Тогда для любых выражение означает, что всякий раз когда и . Выражение (соответственно ) означает, что (). Для любого через и будем обозначать следующие множества и соотвественно. Для произвольного типа мы обозначаем через множество реализаций типа в . Для произвольного кортежа длины мы обозначаем через кортеж для каждого . Будем говорить что произвольный кортеж является возрастающим, если . Если и — отношение эквивалентности на , то мы обозначаем через множество представителей –классов, лежащих в . Если — функция на , то мы обозначаем через Dom область определения функции , а через Range — ее область значений. Теория является бинарной, если любая формула теории эквивалентна в булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных. Через обозначается счетный спектр теории , т.е. число попарно неизоморфных счетных моделей теории . Теория называется эренфойхтовой, если .

В следующих определениях — слабо о-минимальная структура, , — -насыщенна, — неалгебраические.

Определение 1. Будем говорить что тип не является слабо ортогональным типу (), если существуют -определимая формула , и такие, что и .

Иными словами, тип является слабо ортогональным типу , если имеет единственное расширение до полного 2-типа над .

Лемма 2 [19] Отношение не слабой ортогональности является отношением эквивалентности на .

Определение 3 [20] Будем говорить что тип не является вполне ортогональным типу (), если существует -определимая биекция . Будем говорить что слабо о-минимальная теория является вполне о-минимальной, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Очевидно что любая о-минимальная теория является вполне о-минимальной, поскольку в случае не слабой ортогональности 1-типов над произвольным множеством существует -определимая строго монотонная биекция между множествами реализаций этих типов.

Определение 4 [17, 21] Пусть — полная теория, . Тип называется -типом, если Множество всех -типов теории обозначается через . Счетная теория называется почти -категоричной, если для любых типов существует лишь конечное число типов .

Почти -категоричность тесно связана с понятием эренфойхтовости теории. Так, в работе [17] доказано, что если — почти -категоричная теория с условием , то в теории интерпретируется плотный линейный порядок. Тем не менее существует пример (построенный Перетятькиным М.Г. в [22]) теории с условием , но не являющейся почти -категоричной.

В работе [18] установлены почти -категоричность эренфойхтовых вполне о-минимальных теорий и выполнимость принципа замены для алгебраического замыкания для почти -категоричных вполне о-минимальных теорий. Недавно в работе [23] доказаны ортогональность любого семейства попарно слабо ортогональных неалгебраических 1-типов над пустым множеством для таких теорий и бинарность почти -категоричных вполне о-минимальных теорий.

Определение 5 [24] Дизъюнктным объединением попарно непересекающихся структур попарно непересекающихся предикатных сигнатур , , называется структура сигнатуры с носителем , , и интерпретациями предикатных символов из , совпадающими с их интерпретациями в структурах Дизъюнктным объединением теорий попарно непересекающихся предикатных сигнатур соответственно, , называется теория где , .

Заметим, что почти -категоричные слабо о-минимальные теории не являются эренфойхтовыми в общем случае. В качестве примера такой теории мы можем взять дизъюнктное объединение счетного числа копий примера Эренфойхта с тремя счетными моделями, упорядоченное по типу . Эта теория имеет счетное число слабо ортогональных неизолированных 1-типов над , и поэтому имеет максимальное число счетных моделей.

Заметим также что почти -категоричные слабо о-минимальные теории не являются малыми в общем случае. В качестве примера такой теории мы можем рассмотреть структуру . Очевидно что имеет континуум 1-типов над , т.е. не является малой.

Определение 6 [25] Пусть — слабо о-минимальная структура, , — -насыщенна, — неалгебраический.

(1) -определимая формула называется -сохраняющей (или -стабильной), если существуют , , такие, что

(2) -сохраняющая формула называется выпуклой вправо (влево), если существует такой, что выпукло, — левая (правая) концевая точка множества и .

Определение 7 [26] Будем говорить, что -сохраняющая выпуклая вправо (влево) формула является эквивалентность-генерирующей, если для любых таких, что , мы имеем следующее:

.

Определение 8 [13] Пусть — слабо о-минимальная теория, — достаточно насыщенная модель теории , — -определимая формула с одной свободной переменной. Ранг выпуклости формулы определяется следующим образом:

1) , если бесконечно;

2) , если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности и бесконечная последовательность элементов , такие, что:

• для любых с условием мы имеем ;

• для любого , и — выпуклое подмножество множества ;

3) , если для всех , где — предельный ординал.

Если для некоторого , то мы говорим что определяется. В противном случае (т.е. когда для всех ) мы полагаем .

В частности, теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует определимых (с параметрами) отношений эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов. Очевидно что любая о-минимальная теория имеет ранг выпуклости 1. Также заметим что существуют слабо о-минимальные теории ранга выпуклости 1, не являющиеся вполне о-минимальными.

Рангом выпуклости 1-типа () называется инфимум следующего множества:

Предложение 9 Пусть — почти -категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, — неалгебраический. Тогда не существует -сохраняющей выпуклой вправо (влево) формулы.

Следствие 10 Пусть — почти -категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, , — неалгебраический. Тогда для любых , реализующих тип и с условием , существует такой, что .

Пример 11 Пусть — линейно упорядоченная структура, где — множество натуральных чисел, т.е. является дискретно упорядоченной.

Очевидно что — о-минимальная теория. Пусть . Ясно что , и для любой модели теории такой, что , мы имеем что дискретно упорядочено. Рассмотрим следующие формулы:

.

Тогда рассматривая для каждого натурального следующее множество формул

мы получаем, что число -типов бесконечно, где , и следовательно не является почти -категоричной.

Лемма 12 [27] Пусть — произвольная полная теория, , , — -насыщенна, , , , , такие, что , и для всех . Тогда влечет существование такого, что , , для всех и .

Лемма 13 Пусть — почти -категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, , — неалгебраические, . Тогда для любых , таких, что , мы имеем что , , .

Вспомним некоторые понятия, первоначально введенные в [6]. Пусть — –определимо, пусть — проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и пусть . Для каждого пусть . Предположим что для каждого множество ограничено сверху, но не имеет супремума в Пусть — –определимое отношение эквивалентности на , определяемое следующим образом:

Пусть , и для каждого кортежа мы обозначаем через -класс кортежа . Существует естественный –определимый линейный порядок на , определяемый следующим образом. Пусть и . Тогда тогда и только тогда когда для всех . Если , то существует некоторый такой, что или , и поэтому индуцирует линейный порядок на . Мы называем такое множество сортом (в данном случае, –определимым сортом) в , где — Дедекиндово пополнение структуры , и обозреваем как естественно вложенную в . Аналогично мы можем получить сорт в , рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Таким образом, мы будем рассматривать определимые функции из в ее Дедекиндово пополнение более точно в определимые сорты структуры представляющие инфимумы или супремумы определимых множеств.

Пусть , — бесконечно, — –определимый сорт и — –определимая функция. Мы говорим, что является локально возрастающей ( локально убывающей, локально константой) на , если для любого существует бесконечный интервал , содержащий , так что — строго возрастающая (строго убывающая, константа) на ; мы также говорим, что — локально монотонная на , если она является локально возрастающей или локально убывающей на .

Предложение 14 [28] Пусть — слабо о-минимальная теория, , , — неалгебраический. Тогда любая -определимая функция с условием является локально монотонной или локально константой на .

Следствие 15 Пусть — слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, , , — неалгебраический. Тогда любая -определимая функция с условием является строго монотонной или константой на .

Пусть , — конечно, и — неалгебраические. Мы говорим, что семейство 1-типов — слабо ортогонально над , если каждый -кортеж удовлетворяет одному и тому же типу над . Мы говорим, что семейство 1-типов — ортогонально над , если для каждой последовательности , и любых возрастающих кортежей , , таких, что , , , мы имеем что , , .

Лемма 16 Пусть — почти -категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, , , — конечно, — неалгебраические попарно слабо ортогональные типы. Тогда слабо ортогонально над .

Теорема 17 Пусть — почти -категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, — неалгебраические попарно слабо ортогональные 1-типы. Тогда ортогонально над .

Далее нам понадобится понятие -секатора, введенное в [29] для неалгебраических изолированных 1-типов. Пусть , — неалгебраические, . Расширяя понятие -секатора на неизолированный случай, будем говорить что -определимая формула является –секатором, если существует такой, что выпукло, существует с условием , и для каждого такого, что , мы имеем что , т.е. . Если , — -секаторы, то будем говорить что меньше чем , если существует такой, что . Очевидно что если — неалгебраические и , то существует -секатор, и множество всех -секаторов линейно упорядочено. Также очевидно что для любого -секатора функция не является константой на .

Лемма 18 Пусть — почти -категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, , , — конечно, — неалгебраические, и . Тогда

(1) Если существует такой, что , то существует единственный -секатор.

(2) Если существует такой, что , то существуют в точности два -секатора и таких, что меньше чем , и для каждого .

Лемма 19 Пусть — почти -категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, , , — конечно, — неалгебраические, , . Тогда для любых , , таких, что , , , мы имеем что , , , , .

Лемма 20 Пусть — почти -категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, , , — конечно, — неалгебраические. Тогда для любых , , таких, что , , , мы имеем что , , , , .

Лемма 21 Пусть — почти -категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, , , — конечно, — неалгебраические, и . Тогда для любых таких, что , , мы имеем .

Лемма 22 Пусть — почти -категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, , , — конечно, — неалгебраические, и . Тогда для любых и любых возрастающих кортежей , , , таких, что для для любых , , мы имеем .

Теорема 23 Любая почти -категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1 является бинарной.

**3 Обобщение и оценка результатов**

Результаты настоящего проекта связаны с одним из важных разделов математической логики – теорией моделей, изучающей соотношения между формальным языком и его интерпретациями, или моделями. Одним из классических объектов исследования в теории моделей являются полные теории, которые в свою очередь подразделяются на стабильные и нестабильные. Начиная с конца 60-ых годов прошлого века теория моделей главным образом развивалась в направлении изучения свойств стабильных теорий, было получено много глубоких теорем о строении их моделей. При этом наиболее интересные и плодотворные идеи и методы, такие как теория размерностей, ортогональность, модулярность и глубина типов, возникали при изучении подклассов стабильных теорий с естественными ограничениями на формульные множества. В частности, понятие сильной минимальности, введенное А. Лахланом и Дж. Болдуином, оказало существенное стимулирующее воздействие на создание вышеперечисленных методов.

Вместе с тем на протяжении длительного времени важным предметом изучения для специалистов по теории моделей являлся класс линейно упорядоченных структур, подкласс класса нестабильных теорий. За это время при исследовании моделей некоторых частных теорий, расширяющих теорию линейного порядка, были получены впечатляющие результаты. Среди тех теорий, к которым были найдены успешные подходы к изучению, можно назвать арифметику Пеано, теорию упорядоченных абелевых групп, теорию вещественно замкнутых полей и саму теорию линейного порядка. Хотя очень мало сделано на пути развития общей теории моделей для упорядоченных структур.

В исследовании теоретико-модельных свойств упорядоченных структур достигнут определенный успех. Учитывая полученные результаты в рамках настоящего проекта, можно утверждать, что все поставленные задачи решены полностью. Действительно, исследованы свойства почти ω-категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1; доказана ортогональность произвольного семейства попарно слабо ортогональных 1-типов для таких теорий; установлено что такие теории являются бинарными.

Эти результаты важны и развивают общую теорию моделей для упорядоченных структур. Научная значимость полученных результатов подтверждается приглашениями и участием в международных конференциях, получением в предыдущие годы гранта CRDF (дважды). Отметим, что задачей данного фонда является финансирование фундаментальных исследований высокого уровня, которые могли бы быть использованы при создании новых технологий гражданской направленности.

Все вышеперечисленное указывает на актуальность, востребованность и перспективность исследований в данном направлении, что обосновывает необходимость дальнейших исследований.

В плане научно-организационной деятельности отметим следующее:

Кулпешов Б.Ш. является рецензентом реферативных журналов «Mathematical Reviews» и «Zentralblatt MATH»; а с 2015 года является членом Ассоциации Символической Логики. С 2019 года Кулпешов Б.Ш. является председателем диссертационного совета по МКМ при КБТУ.

В плане подготовки научных кадров: Байжанов С.С. окончил PhD докторантуру (научные руководители: Кулпешов Б.Ш. и профессор Университета Лидс Д. Макферсон) и планирует защиту диссертации в текущем году; Емельянов Д.Ю. учится в аспирантуре НГТУ (научные руководители: Судоплатов С.В. и Кулпешов Б.Ш.); Алтаева А.Б. учится в PhD докторантуре (научные руководители: Кулпешов Б.Ш. и Судоплатов С.В.).

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Все запланированные задания согласно календарному плану выполнены в срок и качественно. Проведенные исследования носили чисто теоретический, фундаментальный характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в теории моделей, а также в других разделах математики. Результаты исследований применимы и в таких разделах компьютерных наук, как общая теория реляционных баз данных, гибридные системы и формальные методы исследования информационных систем. Например, с помощью полученных результатов по вполне о-минимальным теориям с малым числом счетных моделей является возможным рассмотрение вопроса конечности бисимуляций для упорядоченных гибридных систем, что является первым шагом для доказательства разрешимости процедур верификации.

Уровень проведенных исследований соответствует международным стандартам, о чем свидетельствует уровень журналов, в которых публикуются исполнители проекта, а также уровень международного сотрудничества (осуществляется постоянное обсуждение научных результатов с зарубежными коллегами).

За истекший период опубликованы 10 работ, в том числе 2 журнальные статьи: 1 – в научном издании, входящий в третий квартиль Web of Science – Алгебра и Логика, 1 – в научном издании, индексируемом Scopus – Eurasian Mathematical Journal; 8 статей и тезисов в сборниках материалов международных конференций.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1 Pillay A, Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures I // Transactions of the American Mathematical Society. – 1986. – Vol. 295, No. 4. – P. 565-592.

2 Knight J., Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures II // Transactions of the American Mathematical Society. – 1986. – Vol. 295, No. 4. – P. 593-605.

3 Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures III // Transactions of the American Mathematical Society. – 1988. – Vol. 300, No. 3. – P. 469-476.

4 Van den Dries L. Remarks on Tarski's problem concerning (R, +, \*, exp) // Logic Colloquim '82 (G. Lolli, G. Longo, and A. Marcja, editors), North-Holland, Amsterdam. – 1984. – P. 97-121.

5 Wilkie A. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function // Journal of the American Mathematical Society. – 1996. – Vol. 9, No. 4. – P. 1051-1094.

6 Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. – Vol. 352, No. 6. – P. 5435–5483.

7 Macpherson H.D., Steinhorn Ch. On variants of o-minimality // Annals of Pure and Applied Logic. – 1996. – Vol. 79, No. 2. – P. 165–209.

8 Belegradek O., Petersil Ya and Wagner F. Quasi-o-minimal structures // The Journal of Symbolic Logic. – 2000. – Vol. 65, No. 3. – P. 1115-1132.

9 Wencel R. Definable sets in Boolean ordered o-minimal structures II // The Journal of Symbolic Logic. – 2003. – Vol. 68, No. 1. – P. 35–51.

10 Glass A., Macintyre A., Point F. Free abelian lattice-ordered groups // Annals of Pure and Applied Logic. – 2005. – Vol. 134, No. 2-3. – P. 265–283.

11 Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly. – 2005. – Vol. 51, No. 4. – P. 377-399.

12 Байжанов Б.С., Вербовский В.В. Упорядоченно стабильные теории // Алгебра и Логика. – 2011. – Т. 50, № 3. – С. 303-325.

13 Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some their properties // The Journal of Symbolic Logic. – 1998. – Vol. 63, No. 4. – P. 1511-1528.

14 Cluckers R. and Leenknegt E. A version of -adic minimality // The Journal of Symbolic Logic. – 2012. – Vol. 77, No. 2. – P. 621–630.

15 Кудайбергенов К.Ж. Обобщение о-минимальности на частичные порядки // Математические труды. – 2012. – Т. 15, вып. 1. – С. 86-108.

16 Moconja S., Tanovic P. Stationarily ordered types and the number of countable models // Annals of Pure and Applied Logic. – 2020. – Vol. 171, No. 3. – P. 102765.

17 Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. On theories having three countable models // Mathematical Logic Quarterly. – 1998. – Vol. 44, No. 2. – P. 161-166.

18 Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В., Линейно упорядоченные теории, близкие к счетно категоричным // Математические заметки. – 2017. – Т. 101, вып. 3. – С. 413-424.

19 Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. – 2001. – Vol. 66. – P. 1382-1414.

20 Кулпешов Б.Ш. Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях // Известия НАН РК, серия физико-математическая. – 2003. – Т. 227. – С. 26–31.

21 Sudoplatov S.V. Classification of countable models of complete theories. — Part 1. — Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University Publishing House. — 2018. — ISBN 978-5-7782-3527-4. — 326 p.

22 Перетятькин М.Г. Теории с тремя счетными моделями // Алгебра и логика. – 1980. – Т. 19, вып. 2. – С. 224--235.

23 Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш. Бинарность почти -категоричных вполне о-минимальных теорий // Сибирский математический журнал. – 2020. – Т. 61, вып. 3. – С. 484-498.

24 Woodrow R.E. Theories with a finite number of countable models and a small language, Ph. D. Thesis, Simon Fraser University. – 1976. – 99 p.

25 Baizhanov B.S. One-types in weakly o-minimal theories // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty. – 1996. – P. 75-88.

26 Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono. – Singapore, World Scientific: 2006. – P. 31-40.

27 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Vaught’s conjecture for quite o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. – 2017. – Vol. 168, No. 1. – P. 129–149.

28 Kulpeshov B.Sh. Countably categorical quite o-minimal theories // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – Vol. 188, No. 4. – P. 387–397.

29 Kulpeshov B.Sh. Criterion for binarity of -categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. – 2007. – Vol. 45, No. 3. – P. 354–367.

**ПРИЛОЖЕНИЕ A**

**Список публикаций исполнителей за 2020 год**

**Отечественные**

1. Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Distributions of countable models of quite o-minimal Ehrenfeucht theories // Eurasian Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 11, No. 3. – P. 66-78.

2. Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Об алгебрах формул для почти омега-категоричных слабо о-минимальных теорий // Сборник материалов международной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке», посвященной 75-летию профессора Е.Ы. Бидайбекова и 35-летию школьной информатики. – Алматы, КазНПУ имени Абая. – 2020. – С. 41-46.

**Зарубежные**

3. Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Об -категоричности Е-комбинации линейных порядков // Тезисы докладов международной конференции «Мальцевские Чтения». – Новосибирск. – 2020. – С. 212.

4. Даулетиярова А.Б. Распределения счетных моделей -стабильных теорий // Тезисы докладов международной конференции «Мальцевские Чтения». – Новосибирск. – 2020. – С. 216.

5. Емельянов Д.Ю. Об алгебрах бинарных изолирующих формул для корневых произведений графов // Тезисы докладов международной конференции «Мальцевские Чтения». – Новосибирск. – 2020. – С. 217.

6. Кулпешов Б.Ш., Мустафин Т.С. Бинарность почти омега-категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1 // Тезисы докладов международной конференции «Мальцевские Чтения». – Новосибирск. – 2020. – С. 226.

7. Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. On algebras of binary formulas for almost omega-categorical weakly o-minimal theories // Collection of abstracts of International conference “Mal’tsev Meeting”. – Novosibirsk. – 2020. – P. 236.

8. Markhabatov N.D. On approximations of acyclic graphs // Collection of abstracts of International conference “Mal’tsev Meeting”. – Novosibirsk. – 2020. – P. 244.

9. Sudoplatov S.V. On a hierarchy for families of theories // Collection of abstracts of International conference “Mal’tsev Meeting”. – Novosibirsk. – 2020. – P. 249.

10. Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры бинарных формул для композиций теорий // Алгебра и Логика. – 2020. – Т. 59, вып. 4. – С. 432-457.

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б**

