



**РЕФЕРАТ**

Есеп беру жұмысы35 б., 1 кітап, 25 әдебиет көздері, 1 қосымшасы.

РИСС БАЗИСІ, ІШКЕҢІСТІКТЕГІ ШАРТСЫЗ БАЗИС, ШАРТСЫЗ БАЗИС, ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІ, ҮЗІЛІСТІ КОЭФФИЦИЕНТ, ҚҰРАМА-ТҰРАҚТЫ ЖЫЛУ ӨТКІЗГІШТІК КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ БАР ЖЫЛУ ӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУ, ЛОКАЛЬДЫ ЕМЕС ШЕТТІК ЕСЕПТЕР, КҮШЕЙТІЛГЕН ЕМЕС РЕГУЛЯРЛЫ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР, ӨЗІНДІК ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ АСИМПТОТИКАСЫ

Зерттеу нысаны: Бас туындыдағы құрама-тұрақты коэффициенттері бар бір өлшемді жылу теңдеуі үшін локальды емес шекаралық есептер және онымен байланысты локал емес дифференциалдық операторлар.

Есептің негізгі ғылыми нәтижелері күнтізбелік кестеге сәйкес алынған:

* Бас туындыдағы құрама-тұрақты коэффициенттері бар екінші ретті қарапайым дифференциалдық операторлар үшін спектрлік есеп үшін өзгеше емес, регуляр емес, күшейтілген регуляр, күшейтілмеген регуляр шеттік шарттарды бөліп алынды;
* Штурм типтес шеттік шарттардағы жылу өткізгіштік теңдеуі үшін (ажыратылған шеттік шарттар) құрама-тұрақты коэффициенттері бар бастапқы-шеттік есептерді айнымалыларды ажырату әдісімен шешу негізделген;
* Жалпы регуляр (локальды емес) шеттік шарттардағы жылу өткізгіштік теңдеуі үшін құрама-тұрақты коэффициенттері бар кері есептердің мүмкін қойылымдары зерттелінген;
* Жалпы күшейтілген емес регуляр (локальды емес) шеттік шарттардағы жылу өткізгіштік теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептері үшін айырымдық үлгісінің орнықтылығының айқын сұлбасы тұрғызылды;
* Бастапқы және шекаралық шарттарының келісілмеген жағдайындағы периодтық шеттік шарттардағы жылу өткізгіштік теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептердің шешімдерін зерттеу жүргізілды.

Жобада қойылған мәселелердің орындалу деңгейі. Жобаның күнтізбелік жоспарында қарастырылған мәселелердің барлығы орындалды, алға қойылған мақсаттарға қол жеткізілді.

Ғылыми жариялымдар. Конкурстық құжаттамаға сәйкес негізгі нәтижелер 2021 жылы жарияланатын болады.

**РЕФЕРАТ**

Отчет 35 с., 1 кн., 25 источн., 1 прил.

БАЗИС РИССА, БЕЗУСЛОВНЫЙ БАЗИС ИЗ ПОДПРОСТРАНСТВ, БЕЗУСЛОВНЫЙ

БАЗИС, УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, РАЗРЫВНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ, НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, НЕУСИЛЕННО РЕГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ, АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Объект исследования: Нелокальные краевые задачи для одномерного уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом при старшей производной и связанные с ними нелокальные дифференциальные операторы.

Основные научные результаты отчета, полученные согласно календарного плана:

* Для спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с кусочно-постоянным коэффициентом при старшей производной выделены невырожденные, нерегулярные, усиленно регулярные, неусиленно регулярные краевые условия;
* Обосновано решение методом разделения переменных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при краевых условиях типа Штурма (разделенные краевые условия);
* Исследованы возможные постановки обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при (нелокальных) регулярных краевых условиях общего вида;
* Построена явная разностная схема для начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при неусиленно регулярных краевых условиях общего вида и исследована ее устойчивость;
* Проведено исследование решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при периодических краевых условиях в случае отсутствия согласования начальных и граничных данных.

Степень выполнения поставленных в проекте задач. Все предусмотренные в календарном плане по проекту задачи выполнены, все намеченные цели достигнуты.

Научные публикации. Согласно конкурсной документации, основные результаты будут опубликованы в 2021-2022 годы.

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| ВВЕДЕНИЕ ………….………….………….….………….………….………………….… | 5 |
| ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ОТЧЕТА О НИР ………….………….………….….………….… | 8 |
| 1 Спектральная задача для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с кусочно-постоянным коэффициентом при старшей производной: выделение невырожденных, нерегулярных, усиленно регулярных, неусиленно регулярных краевых условий ………………………… | 8 |
| 2 Решение методом разделения переменных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при краевых условиях типа Штурма (разделенные краевые условия) .…..… | 13 |
| 3 Постановка обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при (нелокальных) регулярных краевых условиях общего вида ………………………………….………………… | 16 |
| 4 Построение устойчивых разностных схем для начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при неусиленно регулярных краевых условиях общего вида: явная схема …………………………………….…………………… | 18 |
| 5 Исследование решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при периодических краевых условиях в случае отсутствия согласования начальных и граничных данных …………………………………… | 21 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ ………………………………………………………………………… | 24 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ ……………………….…………. | 25 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А – Техническая спецификация и календарный план работ ………. | 27 |

**ВВЕДЕНИЕ**

Содержание отчета. В этом промежуточном отчете (трех месяцев первого года проекта) изложены результаты по исследованию задач теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности. В качестве модельной задачи выбрана двухфазная задача.

Применение метода разделения переменных к решению задачи теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности приводит к спектральной задаче для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с кусочно-постоянным коэффициентом при страшей производной. В разделе 1 рассматриваются основные спектральные свойства задач для такого оператора с общими краевыми условиями. Выделены невырожденные, нерегулярные, усиленно регулярные, неусиленно регулярные краевые условия.

В случае, когда краевые условия являются разделенными (типа Штурма) в разделе 2 обосновано решение задачи теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности методом разделения переменных.

В разделе 3 отчета дано описание исследованым возможным постановкам обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при (нелокальных) регулярных краевых условиях общего вида. Предложено два вида задач – по восстановлению источника по по восстановлению неизвестного коэффициента.

Раздел 4 посвящен построению явной разностной схемы для начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при неусиленно регулярных краевых условиях общего вида. В отличие от разделов 1 – 3 отчета, здесь мы рассматриваем задачу для уравнений теплопроводности без разрыва коэффициента теплопроводности. Дано построение явной разностной схемы и исследована ее устойчивость.

В разделе 5 отчета проведено исследование решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при периодических краевых условиях в случае отсутствия согласования начальных и граничных данных. Здесь, как и в разделе 4, мы рассматриваем задачу для уравнений теплопроводности без разрыва коэффициента теплопроводности. Дано представление решения задачи при данных, не удовлетворяющих условиям согласования нулевого, первого и второго порядков.

Значимость проекта состоит в том, что исследуемые объекты – спектральные задачи для линейных дифференциальных операторов с нелокальными условиями и двухфазные задачи теплопроводности с одной стороны имеют важное значение в самой математической науке, в механике, физике, биологии и других естественно-научных дисциплинах. А с другой стороны, к таким задачам имеется существенный интерес с чисто математической точки зрения. Поэтому полученные результаты являются актуальными и будут понятны научным работникам всего мира. И могут быть ими использованы для дальнейших исследований.

Принципиальное отличие идей Проекта от существующих аналогов. Основное принципиальное отличие настоящего проекта в том, что он опирается на получаемые новые результаты по теории базисности системы корневых векторов дифференциального оператора с разрывным коэффициентом и применяет их для решения прямых и обратных задач теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности. Отличие от наших собственных предыдущих исследований в том, что в прошлых работах мы не рассматривали подобные задачи для уравнения с разрывным коэффициентом. Авторская исследовательская концепция заключается в том, что необходимо построить спектральную теорию для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с кусочно-постоянным коэффициентом при старшей производной.

Актуальность темы исследования. Наряду с классическими краевыми и начально-краевыми задачами, в последнее время внимание многих учёных привлекают задачи математической физики с нелокальными (неклассическими) свойствами. Эта нелокальность может быть в краевых условиях (нелокальные краевые задачи), а также и в самом уравнении (задачи для нелокальных уравнений). Целью этого проекта является исследование важных задач, связанных со спектральной теорией обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями общего вида. Задачи такого типа часто появляются при решении методом разделения переменных задач, возникающих при моделировании многих физических и/или технических процессов, обладающих свойством нелокальности. Эта область пока не полностью развита, как в контексте дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами в целом, так и в контексте их приложения к математическому моделированию.

За три первых месяца проекта все пункты календарного плана выполнены. Эти пункты являются вспомогательными в проекте, поэтому пока еще никакие его результаты не опубликованы.

В приложении А приведен календарный план на 2020–2022 годы.

**ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ОТЧЕТА О НИР**

1 Спектральная задача для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с кусочно-постоянным коэффициентом при старшей производной: выделение невырожденных, нерегулярных, усиленно регулярных, неусиленно регулярных краевых условий

По данному разделу, согласно ожидаемому результату календарного плана договора, для спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с кусочно-постоянным коэффициентом при старшей производной выделены невырожденные, нерегулярные, усиленно регулярные, неусиленно регулярные краевые условия.

Хорошо известно (см., например, [1]), что естественными условиями сопряжения (они следуют из самого уравнения и обуславливаются только разрывами теплофизических характеристик при переходе границы сред) являются условия идеального контакта: условие непрерывности температуры при переходе из одной среды в другую

и условие непрерывности теплового потока

Задачи теплопроводности с разрывными коэффициентами давно и хорошо исследуются. Отметим близкие к нашему проекту работу А.А. Самарского [2] (в которой методом функции Грина и тепловых потенциалов доказана корректность первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом теплопроводности), а также работу казахстанских математиков Е.И. Ким и Б.Б. Баймуханов [3] (в которой методом потенциалов, сведением к интегральному уравнению доказана корректность первой начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом теплопроводности в полупространстве).

Применение метода разделения переменных к решению задачи теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности приводит к спектральной задаче

(1.1)

(1.2)

(1.3)

При спектральная теория этой задачи построена практически полностью. В случае, когда краевые условия (1.2) являются усиленно регулярными из результатов В.П.Михайлова [4], Г.М.Кесельмана [5] и Н.Данфорда и Дж.Т.Шварца [6] следует базисность Рисса в систем собственных и присоединенных функций (СиПФ) задачи. Задача может иметь не более, чем конечное число присоединенных функций. Основываясь на этом факте, Н.И. Ионкин и Е.И. Моисеев [7] в предположении усиленной регулярности условий (1.2) методом разделения переменных построили решение задачи для любых коэффициентов , доказали его единственность и устойчивость по начальным данным в различных нормах.

В случае же, когда краевые условия являются регулярными, но не усиленно регулярными, вопрос о базисности СиПФ до конца окончательно еще не решен. При некоторых коэффициентах система СиПФ задачи (1.1)-(1.2) может образовывать безусловный базис в , а при других – нет. Поэтому невозможно решить задачу методом разделения переменных. Для отдельных частных случаев неусиленно регулярных краевых условий – для двух вариантов задачи Самарского-Ионкина задача решена методом разделения переменных [8, 9].

В наших работах [10-14] для симметричных коэффициентов дана методика решения методом разделения переменных начально-краевых задач с неусиленно регулярными краевыми условиями. Эта методика может быть использована не зависимо от того, образуют ли СиПФ задачи (1.1)-(1.2) безусловный базис в или нет. Нами показано, что в случае регулярных, но не усиленно регулярных условий, решение начально-краевой задачи всегда может быть эквивалентно сведено к последовательному решению двух начально-краевых задач с усиленно регулярными краевыми условиями.

Для случая вопрос о базисности СиПФ задачи (1.1)-(1.2) полностью решен в [15]. В [16] указан один класс неусиленно регулярных краевых условий, при которых СиПФ задачи (1.1)-(1.2) образуют безусловный базис в при любых .

При спектральная теория задачи (1.1)-(1.3) до конца не разработана. Это является одной из задач настоящего проекта. Первой целью настоящего проекта является построение аналогичной теории базисности СиПФ для случая .

Обозначим через и решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям:

(1.4)

и естественным условиями сопряжения (1.3). Не сложно видеть, что характеристический определитель спектральной задачи (1.1)-(1.3) запишется в виде

Учитывая (1.4), отсюда вычисляем

(1.5)

где – есть миноры, соответствующие -тому и-тому столбцам матрицы краевых условий

Для случая, когда , решения и могут быть вычислены в явном виде:

Подставляя их в (1.5), поочередно выделяя главные члены целой функции , мы получаем

(1.6)

Здесь использовано обозначение .

По аналогии с классическим случаем, краевые условия (1.2) будем называть невырожденными, если их коэффициенты удовлетворяют одному из следующих соотношений

1. ;
2. , ;
3. , ,

Очевидно, что граничные условия (1.2) невырождены тогда и только тогда, когда . Для этих случаев невырожденных краевых условий асимптотическое поведение корней характеристического уравнения при может быть получено аналогично методике монографии В.А. Марченко [17].

Теорема 1.1 Для любых невырожденных условий спектр задачи (1.1), (1.2) состоит из бесконечного счетного множества собственных значений с одной предельной точкой , а размерности соответствующих корневых подпространств ограничены одной константой.

На основании полученной асимптотики собственных значений выводятся асимптотики собственных функций. Отсюда делаются выводы о полноте системы собственных функций.

Теорема 1.2 Система собственных и присоединенных функций полна и минимальна в ; следовательно, она имеет биортогональную систему .

Известно, что в классическом случае невырожденные условия можно разделить на три класса:

1. усиленно регулярные условия;
2. регулярные, но не усиленно регулярные условия;
3. нерегулярные условия.

Для случая уравнения (1.1) с разрывным коэффициентом мы также вводим аналогичные понятия. Будем называть краевые условия (1.2) усиленно регулярными, если выполнено одно из трех соотношений

1. ;
2. , , ;
3. ,

Краевые условия (1.2) будем называть регулярными, но не усиленно регулярными, если выполнены условия

, , ;

где .

Краевые условия (1.2) будем называть нерегулярными, если выполнено одно из двух условий

1. , , , , ;
2. , , ;

Согласно введенным определениям, краевые условия будут невырожденными и одновременно нерегулярными в случае, когда , , и не равен нулю один из следующих определителей .

Теорема 1.3 Если краевые условия (1.2) являются усиленно регулярными, то все собственные значения , кроме конечного числа, являются простыми. Другими словами, они являются асимптотически простыми. При этом общее количество присоединенных функций – конечно. Кроме того, собственные значения являются отделенными в том смысле, что существует такая постоянная , что для всех собственных значений и с достаточно большими номерами имеем

(1.7)

Теорема 1.4 Если краевые условия (1.2) являются регулярными, но не усиленно регулярными, то все собственные значения задачи образуют две серии , со следующей асимптотикой:

где , а индекс – из определения неусиленно регулярных краевых условий, и использовано обозначение .

Теорема 1.5 Если краевые условия (1.2) являются нерегулярными, то все собственные значения , кроме конечного числа, являются простыми и выполнено условие (1.7) отделенности собственных значений.

Как и в классическом случае (), введенные определения обусловлены тем, что в выделенных случаях мы имеем возможность указать асимптотику собственных значений. Благодаря этому мы сможем обосновать базисность (или отсутствие свойства базисности) системы собственных и присоединенных функций задачи. Это будет исследовано, согласно следующим разделам календарного плана, в 2021 году.

Работа по данному разделу календарного плана выполнена полностью.

2 Решение методом разделения переменных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при краевых условиях типа Штурма (разделенные краевые условия)

По данному разделу, согласно ожидаемому результату календарного плана договора, обосновано решение методом разделения переменных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при краевых условиях типа Штурма (разделенные краевые условия).

Рассмотрим начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности

(2.1)

в области , c начальным условием

(2.2)

и краевыми условиями вида

(2.3)

Краевые условия такого типа (разделенные краевые условия) называют условиями типа Штурма. Точка – строго внутренняя точка интервала . Коэффициентами уравнения (2.1) и коэффициентами краевого условия (2.3) являются действительные числа: , .

Задача (2.1)-(2.3) моделирует процесс распространения температурного поля в тонком стержне длины , состоящем из двух участков – и – с различными теплофизическими характеристиками. Дополнительно к краевым условиям (2.3) задаются условия на границе контакта двух сред с различными теплофизическими характеристиками – условия сопряжения при . Хорошо известно (см., например, [1]), что естественными условиями сопряжения (они следуют из самого уравнения и обуславливаются только разрывами теплофизических характеристик при переходе границы сред) являются условия идеального контакта: условие непрерывности температуры при переходе из одной среды в другую (2.4), и условие непрерывности теплового потока (2.5):

(2.4)

(2.5)

Задачи теплопроводности с разрывными коэффициентами давно и хорошо исследуются. Отметим близкие к нашему проекту работу А.А. Самарского [2] (в которой методом функции Грина и тепловых потенциалов доказана корректность первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом теплопроводности), а также работу казахстанских математиков Е.И. Ким и Б.Б. Баймуханов [3] (в которой методом потенциалов, сведением к интегральному уравнению доказана корректность первой начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом теплопроводности в полупространстве). Мы не будем останавливаться на значительном количестве публикаций на эту интересную тему. Однако неизученными остаются задачи с более общими краевыми условиями по пространственной переменной. Именно такие задачи будут исследованы в настоящем проекте. Для дальнейших исследований задач с более сложными краевыми условиями первым шагом является исследование задач с краевыми условиями типа Штурма (2.3).

Применение метода разделения переменных к решению задачи теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности приводит к спектральной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения (1.1) с разрывным коэффициентом и краевыми условиями типа Штурма

(2.6)

и с условиями сопряжения (1.3).

Лемма 2.1. Пусть функция – действительнозначная и на каждом из интервалов принадлежит классам , , а коэффициенты краевого условия (2.6) – действительные числа. Тогда система нормированных собственных функций задачи (1.1), (2.6), (1.3) образует ортонормированный базис в .

На основании этой леммы решение задачи (2.1)-(2.5) может быть построено методом разделения переменных в виде ряда

Используем следующие обозначения для отдельных частей области :

,

Через обозначим линейное многообразие функций из класса которые удовлетворяют всем условиям (2.3)-(2.5).

Функцию из класса будем называть классическим решением задачи (2.1)-(2.5), если она удовлетворяет уравнению (2.1) и всем условиям (2.2)-(2.5) в обычном, непрерывном смысле.

Функцию будем называть сильным решением задачи (2.1)-(2.5), если существует такая последовательность , что

, в , а в .

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для любых функций и , удовлетворяющих краевым условиям (2.6) и условиям сопряжения (2.5), существует единственное классическое решение задачи (2.1)-(2.5).

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для любой функции , удовлетворяющей краевым условиям (2.6) и условиям сопряжения (2.5), и любой и существует единственное обобщенное решение задачи (2.1)-(2.5). Это решение является сильным решением задачи (2.1)-(2.5) и удовлетворяет оценке

.

Данный результат является вспомогательным в проекте. На его основе мы сможем в дальнейшем обосновать применение метода разделения переменных для начально-краевых задач с неусиленно регулярными краевыми условиями по пространственной переменной.

Работа по данному разделу календарного плана выполнена полностью.

3 Постановка обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при (нелокальных) регулярных краевых условиях общего вида

По данному разделу, согласно ожидаемому результату календарного плана договора, исследованы возможные постановки обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при (нелокальных) регулярных краевых условиях общего вида.

В результате предварительных исследований предложены следующие варианты постановки обратных задач.

Задача восстановления источника. В стандартной области найти неизвестную правую часть уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом

(3.1)

и его решение , удовлетворяющее краевым условиям

(3.2)

по начальным условиям

(3.3)

и условиям финального переопределения

(3.4)

При задачи подобного типа для различных видов краевых условий (3.2) неоднократно рассматривались ранее. В нашей работе [10] дано решение обратных задач с условиями начального и конечного переопределения при общих краевых условиях вида (3.2), которые являются регулярными, но не усиленно регулярными. В недавней нашей работе [18] мы применили подобный метод для решения обратной задачи для уравнения диффузии с инволюцией в главном члене уравнения при нелокальных краевых условиях.

Решение этой задачи для случая разрывного коэффициента мы разбиваем на несколько случаев или этапов. Сначала задача будет исследована для случая краевых условий типа Штурма (2.3). Далее, будет обосновано решение обратной задачи по восстановлению источника для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности (3.1) при усиленно регулярных краевых условиях (3.2). А затем, решение задачи (3.1)-(3.4) будет дано для случая неусиленно регулярных краевых условий (3.2).

Кроме того, для дальнейшего рассмотрения предлагается следующая коэффициентная обратная задача для уравнения теплопроводности (3.1) с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при неусиленно регулярных краевых условиях.

Задача восстановления коэффициента. В области рассмотрим задачу о нахождении неизвестного коэффициента уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом

(3.5)

и его решение , удовлетворяющее краевым условиям (3.2) и начальным условиям (3.3) по интегральному условию переопределения

(3.6)

где – заданная функция.

При задачи подобного типа для различных видов краевых условий (3.2) неоднократно исследовались ранее. Для условий, которые являются регулярными, но не усиленно регулярными, в наших работах [19-21] были найдены условия существования единственного решения такой обратной коэффициентной задачи. Отметим, что задача решена не зависимо от того, обладает ли спектральная задача (возникающая при методе разделения переменных) свойством базисности СиПФ.

В настоящем проекте, согласно следующим разделам календарного плана, данная обратная коэффициентная задача будет исследована для случая разрывного коэффициента .

Необходимо отметить работу А.М. Денисова [22], в которой исследовался вопрос единственности решения обратных задач для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом при классических краевых условиях по пространственной переменной.

Работа по данному разделу календарного плана выполнена полностью.

4 Построение устойчивых разностных схем для начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при неусиленно регулярных краевых условиях общего вида: явная схема

По данному разделу, согласно ожидаемому результату календарного плана договора, построена явная разностная схема для начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при неусиленно регулярных краевых условиях общего вида и исследована ее устойчивость.

В отличие от разделов 1 – 3 отчета, здесь мы рассматриваем задачу для уравнений теплопроводности без разрыва коэффициента теплопроводности. Рассмотрение проводим в стандартной области .

Рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения теплопроводности

(4.1)

удовлетворяющего начальному условию

(4.2)

и краевым условиям общего вида

(4.3)

где коэффициенты , краевого условия (4.3) – действительные числа, а функции – первоначально заданные.

Мы будем рассматривать только краевые условия, которые являются регулярными, но не усиленно регулярными. Как было показано в наших работах [10, 12], все такие условия могут быть приведены к одному из следующих четырех видов:

(4.4)

где и выполняется одно из следующих четырех условий:

В тех же работах обосновано, что решение задачи (4.1),(4.2),(4.4) может быть эквивалентно редуцированно к последовательному решению двух задач с краевыми условиями типа Штурма по пространственным переменным. Поэтому основной результат о существовании и единственности решения задачи (4.1),(4.2),(4.4) в классическом и обобщенном смыслах следует из хорошо известных теорем о соответствующей разрешимости краевых задач с условиями типа Штурма для уравнения теплопроводности. Аналогичная методика может быть применена и к построению разностных схем для решения задачи (4.1),(4.2),(4.4).

Перейдем к основным результатам этого раздела: построению устойчивой разностной схемы. Мы выбрали хорошо известный метод явных разностных схем.

Введем сетку где

и обозначим через

Дифференциальную задачу (4.1) заменим на сетке следующим разностным уравнением:

(4.5)

где – сеточная функция, которая аппроксимирует функцию

Нам нужно также добавить разностные краевые условия и разностное начальное условие к уравнению (4.5):

(4.6)

(4.7)

Разностная задача (4.5)-(4.7) имеет порядок аппроксимации , т.к. производные в граничных условиях аппроксимируются с порядком в классе (. Порядок аппроксимации схемы (4.5)-(4.7) нетрудно повысить до , если для аппроксимации производных в граничных условиях использовать само уравнение .

Точность данной разностной схемы характеризуется с помощью погрешности . Будем использовать следующее обозначение нормы:

Действуя согласно классической методике, получаем основной результат раздела.

Теорема 4.1 Для разностной задачи (4.5)-(4.7) имеет место следующая оценка сходимости

где – правая часть разностной задачи, , при выполнении необходимого условия устойчивости

где – максимальное по модулю собственное значение некоторого разностного оператора , который мы детально не будем здесь прописывать.

Для расчетов по данной разностной схеме необходимо использовать условие устойчивости явной схемы:

Работа по данному разделу календарного плана выполнена полностью.

5 Исследование решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при периодических краевых условиях в случае отсутствия согласования начальных и граничных данных

По данному разделу, согласно ожидаемому результату календарного плана договора, проведено исследование решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при периодических краевых условиях в случае отсутствия согласования начальных и граничных данных.

В отличие от разделов 1 – 3 отчета, здесь мы рассматриваем задачу для уравнений теплопроводности без разрыва коэффициента теплопроводности. Рассмотрение проводим в стандартной области .

Задача . Найти решение уравнения теплопроводности

(5.1)

удовлетворяющее начальному условию и периодическим краевым условиям

(5.2)

(5.3)

Отметим, что мы выбрали для исследования однородные условия (5.3) только для того, чтобы не загромождать отчет. Случай неоднородных условий (5.3) исследуется аналогично.

Эта задача (при выполнении условий согласования) является достаточно хорошо исследованной. Ее решение (как в классическом, так и в обобщенном смыслах) существует и единственно. Оно может быть построено методом разделения переменных. В нашей работе [23] была построена функция Грина этой задачи. Во всех предыдущих исследованиях обязательно предполагалось выполнение условий согласования граничных данных (5.3) с начальными данными (5.2) и с правой частью уравнения (5.1). Определим эти условия согласования.

Легко видеть, что если решение задачи (5.1)-(5.3) будет принадлежать классу непрерывных в замкнутой области функций: , то из второго условия в (5.3) при имеем . Это, с учетом (5.2), даёт, что необходимо должны быть выполнены условия

(5.4)

Это условие назовем условием согласования нулевого порядка.

Аналогично из первого условия в (5.3) и из (5.2) получаем условие согласования первого порядка:

(5.5)

Условие согласования второго порядка возникают, когда мы рассматриваем решения задачи из класса . Для функций из такого класса мы можем перейти к пределу в уравнении (5.1) при и при и . Тогда получаем

(5.6)

Очевидно, что, продолжая таким образом, мы можем построить условия согласования любого натурального порядка . Но в данном отчете мы остановимся на условиях нулевого, первого и второго порядков.

В настоящем проекте мы рассматриваем задачи в случае, когда не выполнены условия согласования (5.4)-(5.6). Общая методика исследований использует идеи наших работ [10-12] и работы Г.И. Бижановой [24].

Рассмотрения будем проводить в классических классах Гёльдера. Хорошо известно, что естественными классами для рассмотрения решения задач теплопроводности являются классы Гёльдера . При этом входные данные задачи должны принадлежать классам: , .

Напомним, что норма в пространстве Гёльдера задается формулой

В дальнейшем мы будем использовать функции Хартри [25], определяемые по формулам

Теорема 5.1. Для любых , , не удовлетворяющих условиям согласования нулевого и первого порядков (5.4)-(5.5), задача (5.1)-(5.3) имеет единственное решение

(5.7)

где функции и – нерегулярные части решения, определяемые формулами

(5.8)

(5.9)

а принадлежит классу и для неё справедлива оценка

(5.10)

Термин «нерегулярные слагаемые» применяется здесь потому, что функции и , хотя и являются ограниченными, но не имеют предела в точках и .

Отметим, что в [24] было показано, что и первая и вторая начально-краевые задачи при рассогласовании начальных и граничных данных первого и второго порядков, имели в составе решения только по одному нерегулярному слагаемому. В отличие от [24], как показывает теорема 5.1, решение начально-краевой задачи с периодическими краевыми условиями содержит два нерегулярных слагаемых.

Теорема 5.2. Для любых , , не удовлетворяющих условиям согласования нулевого, первого и второго порядков (5.4)-(5.6), задача (5.1)-(5.3) имеет единственное решение

где функции , и – нерегулярные части решения, определяемые формулами (5.8), (5.9) и

(5.11)

а принадлежит классу и для неё справедлива оценка (5.10).

Работа по данному разделу календарного плана выполнена полностью.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Таким образом, в этом промежуточном отчете (трех месяцев первого года проекта) изложены результаты по исследованию задач теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности. В качестве модельной задачи выбрана двухфазная задача.

Центральным результатом проекта является постановка и исследование нового класса общих нелокальных краевых задач теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности. Полученные в настоящем отчете результаты являются промежуточными на пути к достижению целей проекта.

Степень новизны полученных результатов. Все приведенные в отчете научные результаты являются новыми.

Степень выполнения поставленных в проекте задач. Все предусмотренные в календарном плане по проекту задачи выполнены, все намеченные цели достигнуты.

Завершенность результатов. Сформулированные и приведенные в отчете результаты являются полностью доказанными. Из-за ограничения по объему отчета эти доказательства в отчете не приводятся.

Научные публикации. По результатам исследований получены важные результаты, которые являются вспомогательными в проекте, поэтому пока еще никакие его результаты не опубликованы.

Исследования будут продолжены в следующие годы согласно календарного плана.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1 Samarskii A.A., Vabischevich P.N. Vychislitelnaya teploperedacha. – Editorial URSS. – Moskow. – 2003.

2 Samarskii A.A. Parabolic equations with discontinuity coefficients // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1958. – Vol. 121, №. 2. – P. 225–228.

3 Kim E.I., Baimukha№v B.B. The temperature distribution in a piecewise homogeneous semi-infinite plate // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1958. – Vol. 140, №. 2. – P. 333–336.

4 Kesel’man G.M. On the unconditional convergence of eigenfunction expansions of certain differen-tial operators // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 1964. – №. 2. – P. 82-93.

5 Mikhailov V.P. On Riesz basis in L2(0, 1) // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1962. – Vol. 144, №. 5. – P. 981-984.

6 Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators. Part III, Spectral Operators. – Wiley, New York. – 1971.

7 Ionkin N.I., Moisseev E.I. A problem for the heat equation with two-point boundary conditions // Differential Equations. – 1979. – Vol. 15. – P. 1284–1295.

8 Ionkin N.I. Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a №n-classical boundary condition // Differential Equations. – 1977. – Vol. 13. – P. 204–211.

9 Ionkin N.I., Morozova V.A. The two-dimensional heat equation with №nlocal boundary conditions // Differential Equations. – 2000. – Vol. 36. – P. 982-987.

10 Orazov I., Sadybekov M.A. On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature // Siberian Mathematical Journal. – 2012. – Vol. 53, №. 1. – P. 146-151.

11 Orazov I., Sadybekov M.A. One №nlocal problem of determination of the temperature and density of heat sources // Russian Mathematics (Iz. VUZ). – 2012. – Vol. 56, №. 2. – P. 60–64

12 Sadybekov M.A. Initial-Boundary Value Problem for a Heat Equation with №t Strongly Regular Boundary Conditions // Functional Analysis in Interdisciplinary Applications. – Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – 2017. – Vol. 216. – P. 330–348.

13 Orazov I., Sadybekov M.A. On an inverse problem of mathematical modeling of the extraction process of polydisperse porous materials. – AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1676, 020005. – 4 pp.

14 Orazov I., Sadybekov M.A. One-dimensional Diffusion Problem with №t Strengthened Regular Boundary Conditions // AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1690, 040007. – 6 pp.

15 Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by −D2// J. Math. Anal. Appl. – 1990. – Vol. 146, №. 1. – P. 148-191.

16 Makin A.S. On spectral decompositions corresponding to №n-self-adjoint Sturm-Liouville operators // Doklady Mathematics. – 2006. – Vol. 73, №. 1. – P. 15-18.

17 Marchenko V.A. Sturm-Liouville Operators and Their Applications. – Naukova Dumka, Kiev, Ukraine. – 1977. English translation: Birkhauser, Basel, Switzerland. – 1986.

18 Kirane M., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.A. On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from №nlocal data // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2019. – Vol. 42, №. 6. – P. 2043–2052.

19 Садыбеков М.А., Оралсын Г. Обратная коэффициентная задача теплопроводности с нелокальным условием типа Самарского-Ионкина // Математический журнал. – 2015. – Т. 15, № 2. – С. 99 - 112.

20 Oralsyn G., Sadybekov M. A. An inverse coefficient problem of heat conductivity with a №nlocal Samarskii-Ionkin type condition // AIP Conf. Proc. – 2015. – Vol. 1676. – P. 020016. http://dx.doi.org/10.1063/1.4930442

21 Sadybekov M.A., Oralsyn G., Ismailov M. An inverse problem of finding the time-depend-ent heat transfer coefficient from an integral condition // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 113, №. 4. – P. 139–149.

22 Denisov A. M. Uniqueness of the solution of some inverse problems for the heat equation with a piecewise-constant coefficient // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. – 1982. – Vol. 22, №4. – P. 92–99.

23 Садыбеков М.А., Дилдабек Г., Тенгаева А.А. Функция Грина задачи теплопроводности с периодическим краевым условием // Математический журнал. – 2016. – Т. 16, № 1. – С. 135-144.

24 Bizhanova G.I. Solutions in Hölder spaces of boundary-value problems for parabolic equations with №nconjugate initial and boundary data // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 171, № 1. – P. 9–21.

25 Справочник по специальным функциям. – под ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. – 1979. – М.: Наука. – 832 с.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**Техническая спецификация и календарный план работ**

















